UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

TEORIA DE ERRORES

Notas de aula

1 Introducción

Todas las medidas experimentales vienen afectadas de una imprecisión inherente al proceso de medida. Puesto que en éste se trata, básicamente, de comparar con un patrón y esta comparación se hace con un aparato (por simple que sea-una regla, por ejemplo- podemos incluirlo en la denominación generalizada de "aparato"), la medida dependerá de la mínima cantidad que aquel sea capaz de medir. Y esta cantidad va decreciendo con el progreso de la física en un proceso continuado, pero sin fin aparente. Es decir, que, aunque cada vez podamos dar la medida con más "decimales", el siguiente "decimal" no podrá saberse por el momento.

Por lo tanto, podemos decir que las medidas de la física son siempre "incorrectas". Dicho de una manera más "correcta": si llamamos error a la diferencia que existe entre la medida y el valor "verdadero" de la magnitud, siempre existirá este error. Es, lo que podríamos llamar un "error intrínseco", por inevitable.

Pero, el valor de las magnitud físicas se obtiene, como hemos indicado, experimentalmente. Es decir, por medición, bien directa de la magnitud cuyo valor deseamos conocer o bien indirecta por medio de los valores de otras magnitudes, ligadas con la magnitud problema mediante alguna ley o fórmula física. Por lo tanto, debe de admitirse como postulado que, aparte del "error intrínseco" que hemos señalado anteriormente, el proceso experimental lleva en sí otras imperfecciones que hacen que resulte imposible (incluso si prescindiéramos del "error intrínseco") llegar a conocer el valor exacto de ninguna magnitud física, puesto que los medios experimentales de comparación con el patrón correspondiente en las medidas directas (las medidas "propiamente dichas") viene siempre afectado por imprecisiones inevitables. De este modo, aunque es imposible, en la práctica, encontrar el valor "verdadero" o "exacto" de una magnitud determinada, a los científicos no les cabe duda de que existe; y nuestro problema consiste en establecer los límites dentro de los cuales estamos seguros de que se encuentra dicho valor("cota de error").

2 CLASIFICACIÓN DE LOS ERRORES

El error se define, tal como habíamos dicho, como la diferencia entre el valor verdadero y el obtenido experimentalmente. Los errores no siguen una ley determinada y su origen está en múltiples causas. Atendiendo a las causas que lo producen, los errores se pueden clasificar en dos grandes grupos: errores sistemáticos y errores accidentales.

Errores sistemáticos

Se denomina error sistemático a aquel que es constante a lo largo de todo el proceso de medida y, por tanto, afecta a todas las medidas de un modo definido y es el mismo para todas ellas. Estos errores tienen siempre un signo determinado y las causas probables pueden ser:

1. **Errores instrumentales (de aparatos)**:por ejemplo, el error de calibrado de los instrumentos.

2. **Error personal**:Este es, en general, difícil de determinar y es debido a las limitaciones de carácter personal. Como, por ejemplo, los errores de paralaje, o los problemas de tipo visual.

3. **Errores de método de medida**: Corresponden a una elección inadecuada del método de medida; lo que incluye tres posibilidades distintas: la inadecuación del aparato de medida, del observador o del método de medida propiamente dicho.

Errores accidentales

Se denominan errores accidentales a aquellos que se deben a las pequeñas variaciones que aparecen entre observaciones sucesivas realizadas por el mismo observador y bajo las mismas condiciones. Las variaciones no son reproducibles de una medición a otra y se supone que sus valores están sometidos tan sólo a las leyes del azar y que sus causas son completamente incontrolables para un observador. Los errores accidentales poseen, en su mayoría, un valor absoluto muy pequeño y si se realiza un número suficiente de medidas se obtienen tantas desviaciones positivas como negativas. Y, aunque con los errores accidentales no se pueden hacer correcciones para obtener valores más concordantes con los reales, si pueden emplearse métodos estadísticos, mediante los cuales se pueden llegar a algunas conclusiones relativas al valor más probable en un conjunto de mediciones.

3 Concepto de Exactitud, precisión y sensibilidad

En lo que se refiere a los aparatos de medida, hay tres conceptos muy importantes que vamos a definir: **exactitud, precisión y sensibilidad.**

1. La **exactitud** se define como el grado de concordancia entre el valor "verdadero" y el experimental. De manera que un aparato es exacto si las medidas realizadas con él son todas muy próximas al valor **"verdadero"** de la magnitud medida.

2. La **precisión** hace referencia a la concordancia entre las medidas de una misma magnitud realizadas en condiciones sensiblemente iguales. De modo que, una aparato será preciso cuando la diferencia entre diferentes mediciones de una misma magnitud sean muy pequeñas.

La exactitud implica, normalmente, precisión, pero la afirmación inversa no es cierta, ya que pueden existir aparatos muy precisos que posean poca exactitud, debido a errores sistemáticos, como el "error de cero", etc. En general, se puede decir que es más fácil conocer la precisión de un aparato que su exactitud (básicamente, debido a la introducción del término ***"verdadero"****).*

3 La **sensibilidad** de un aparato está relacionada con el valor mínimo de la magnitud que es capaz de medir. Por ejemplo, decir que la sensibilidad de una balanza es de 5 mg significa que, para masas inferiores a la citada, la balanza no acusa ninguna desviación. Normalmente, se admite que la sensibilidad de un aparato viene indicada por el valor de la división más pequeña de la escala de medida. En muchas ocasiones, de un modo erróneo, se toman como idénticos los conceptos de precisión y sensibilidad, aunque ya hemos visto que se trata de conceptos diferentes. Lo que estamos hablando (y hablaremos todavía un tiempo) de valores **"verdaderos"**, habrá que entenderlos como los que más tarde definiremos (básicamente, valores medios).

4 Error Absoluto y Error Relativo

Si medimos una cierta magnitud física cuyo valor **"verdadero"** es x_0 , obteniendo un valor de la medida x, llamaremos **error absoluto** de dicha medida a la diferencia.

$$\Delta x = x - x_0 \tag{1}$$

en donde, en general, se supone que $\Delta x \ll |x_0|$

El error absoluto nos da una medida de la desviación, en términos absolutos, respecto al valor **"verdadero"**. No obstante, en ocasiones nos interesa resaltar la importancia relativa de esa desviación. Para tal fin, se usa el error relativo.

El **error relativo** se define como el cociente entre el error absoluto y el valor **"verdadero":**

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_0} \tag{2}$$

lo que, en forma porcentual se expresará como $\varepsilon \times 100\%$.

Cuando indiquemos el resultado de una medida (o de un conjunto de medidas) de una magnitud, tendremos que indicar, siempre, el grado de incertidumbre de la misma, para lo cual acompañamos el resultado de la medida de sus error absoluto; expresando el resultado así

$$x \pm \Delta x \tag{3}$$

De ordinario, y dado el significado de la cota de imprecisión que tiene el error absoluto, este, durante el transcurso de estas prácticas de laboratorio, no deberá escribirse con más de una cifra significativa (aunque podrían admitirse dos cifras si estas no sobrepasan 24, pero esto se quedará para cursos posteriores). Si el error se ha obtenido con más de una cifra, se deberá a proceder a suprimir las posteriores, *aumentando en una unidad la primera, si la segunda fuera 5 o mayor que 5.*

El valor de la magnitud debe de tener sólo las cifras necesarias para que su última cifra significativa sea del mismo orden decimal que la última del error absoluto, llamada *cifra de acotamiento.* Como ejemplo, damos las siguientes tablas de valores de distintas magnitudes (en la columna de la izquierda mal escritos y en la de la derecha correctos) para poner de manifiesto lo que acabamos de decir.

Valores incorrectos	Valores correctos
$3,418 \pm 0,123$	$3,4 \pm 0,1$
$6,3 \pm 0.09$	$6,30 \pm 0.09$
46288 ± 1551	$(4,6 \pm 2) \times 10^3$
$428,351 \pm 0,27$	$428,4 \pm 0,3$
$0,01683 \pm 0,0058$	$0,017 \pm 0,006$

Nota:

Si un valor es leído de una tabla o algún otro lugar (que no tengan una mención expresa del error cometido), se tomará como si todas sus cifras fueran significativas.

5 DETERMINACIÓN DE ERRORES EN MEDIDAS DIRECTAS

Cuando realicemos la medida de cualquier magnitud, deberemos indicar siempre una estimación del error asociado a la misma. Dado que no conocemos el valor "verdadero" de la magnitud que deseamos medir, habrá que seguir ciertos procedimientos para hacer una estimación, tanto del valor "verdadero", como de una cota de error, que nos indiquen la incertidumbre de la medición realizada. Distinguiremos dos casos bien diferenciados:

Caso (a)

Si sólo se puede realizar una sola medida, x, de la magnitud. En este caso consideraremos que el error absoluto coincide con el valor absoluto de la sensibilidad (S) del aparato utilizado para realizar la medida. De este modo, el resultado de la medida lo expresaremos así:

$$x \pm S \tag{4}$$

Caso (b)

Caso en el que se realizan varias medidas de una misma magnitud. Con el fin de alcanzar cierta validez estadística en los resultados de las medidas, es muy conveniente repetir varias veces la determinación del valor de la magnitud problema. Los resultados de las medidas individuales pueden presentarse poco o muy dispersas y, en función de esta dispersión será conveniente aumentar o no el número de mediciones de la magnitud. Para decidir el número de determinaciones que hay que efectuar del valor de la magnitud física que deseamos medir, seguiremos el siguiente procedimiento:

Se realizan tres medidas de la magnitud (x_1, x_2, x_3), se calcula el valor $\overline{x}_3 = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, y se halla la dispersión total, D, de las mismas, es decir, la diferencia entre los valores extremos de las medidas (**valor máximo menos el valor mínimo**).

Finalmente, se obtiene el tanto por ciento de dispersión, T, que viene dado por:

$$T = \frac{D}{x_3} \tag{5}$$

(i.) Ahora bien, puede suceder que el valor de la dispersión D no sea mayor que el valor de la sensibilidad del aparato de medida $D \leq S$.

En este caso, tomaremos como estimación del valor **"verdadero"** de la magnitud el valor medio de las tres medidas, $\overline{x}_3$, y como error absoluto la sensibilidad, es decir, $\overline{x}_3 \pm S$

(ii.) Ahora bien, si el valor de la dispersión D es mayor que la sensibilidad del aparato, $D > S$ procederemos a aumentar el número de medidas de la magnitud. El criterio a seguir en esta aumento viene condicionado por el valor del porcentaje dispersión T del modo indicado en la siguiente tabla:

T en las tres primera medidas	**N° Total de medidas necesarias**
$T_3 \leq 2\%$	Bastan las 3 medidas realizadas
$2\% < T_3 \leq 8\%$	Hay que hacer 3 medidas más, hasta un total de 6
$8\& < T_6 \leq 15\%$	Hay que hacer un total de 15 medidas
$15\% < T_{15}$	Hay que hacer un mínimo de 50 medidas

Una vez realizadas las medidas necesarias, se toma como valor de la magnitud el valor medio de la misma, calculado sobre el número total de medidas realizadas y en cuanto al correspondiente error, se determina según los casos que sigue:

- Si se han realizado tres medidas, se toma como error absoluto el valor de la sensibilidad del aparato, es decir, lo que ya hemos indicado, $\Delta x = S$
- Si se han realizado seis medidas, entonces se calcula el error de dispersión definido como $D_6/4$ (la cuarta parte de la dispersión total de las seis medidas, es decir, la diferencia entre la mayor y la menor de todas), y se asigna como error absoluto de las medidas, el mayor de entre este valor y la sensibilidad del aparato. Es decir,

$$\Delta x = \max(D_6/6, S)$$

- Si se han realizado más de 15 medidas; entonces el error absoluto puede calcularse por la expresión

$$\Delta x = \left[\frac{\sum(x_i - \overline{x}_n)^2}{N}\right]^{1/2} \tag{6}$$

que proporciona el llamado error cuadrático medio (puesto que es algo así como una media del cuadrado de los errores), en donde x_i son cada una de las medidas realizadas, $\overline{x}_n$ es la media aritmética de todas las medidas individuales y N es el número total de medidas realizadas. El procedimiento seguido en este último caso se debe a que, en una serie repetida de medidas de una misma magnitud, la distribución estadística de éstas alrededor del valor medio representa una forma típica, que recibe el nombre de distribución gaussiana o distribución normal.

6 Propagación de los errores

6.1 Propagación de Errores

Propagación de Errores: Conjunto de reglas que permiten asignar un error a z, conocidas las incertidumbres de x e y, ...

1. Permiten asignar un error al resultado final
2. Indica la importancia relativa de las diferentes medidas directas
3. Planificación del experimento

Hipótesis de partida:

1. **Medidas dependientes** Hipótesis pesimista. Siempre en la situación más desfavorable. Conjunto de reglas prácticas.
2. **Medidas independientes** Errores cuadráticos medios. Fórmula general de propagación de errores.

6.2 Propagación de errores en sumas y diferencias

- Datos iniciales: $x \pm \delta x \quad y \pm \delta y$
- Sea la suma $q = x + y$ y la diferencia $q = x - y$
- ¿Cuál es la incertidumbre, δq?

	Suma	**Diferencia**
Valor máximo de q	$q_{max} = x + \delta x + y + \delta y$ $= x + y + (\delta x + \delta y)$	$q_{max} = x + \delta x - (y - \delta y)$ $= x - y + (\delta x + \delta y)$
Valor mínimo de q	$q_{min} = x - \delta x + y - \delta y$ $= x + y - (\delta x + \delta y)$	$q_{min} = x - \delta x - (y + \delta y)$ $= x - y - (\delta x + \delta y)$

El error absoluto de la suma y de la diferencia de dos o mas magnitudes es la suma de los errores absolutos de dichas magnitudes:

$$q = x \pm y \Rightarrow \delta q \approx \delta x + \delta y \tag{7}$$

Ejemplo 1

En un experimento se introducen dos líquidos en un matraz y se quiere hallar la masa total del líquido. Se conocen:

$$\begin{aligned} M_1 &= \text{Masa del Matraz 1+ contenido} &= 540 \pm 10g \\ m_1 &= \text{Masa del Matraz 1} &= 72 \pm 1g \\ M_2 &= \text{Masa del Matraz 2+ contenido} &= 940 \pm 20g \\ m_2 &= \text{Masa del Matraz 2} &= 97 \pm 1g \end{aligned}$$

La masa de liquido será:

$$M = M_1 - m_1 + M_2 - m_2 = 1311g$$

Su error sera:

$$\delta M = \delta M_1 + \delta m_1 + \delta M_2 + \delta m_2 = 32g$$

El resultado se expresará:

$$M = 1311 \pm 32g$$

6.3 Propagación de errores en producto

- Datos iniciales: $x \pm \delta x = x\left(1 \pm \frac{\delta x}{|x|}\right) \quad y \pm \delta y = y\left(1 \pm \frac{\delta y}{|y|}\right)$
- Sea el producto $q = xy$
- ¿Cuál es la incertidumbre, δq?

Producto

Valor máximo de q $\quad q_{max} = x\left(1 + \frac{\delta x}{|x|}\right) y\left(1 + \frac{\delta y}{|y|}\right) \quad \approx xy\left(1 + \frac{\delta x}{|x|} + \frac{dy}{|y|}\right)$

Valor mínimo de q $\quad q_{min} = x\left(1 - \frac{\delta x}{|x|}\right) y\left(1 - \frac{\delta y}{|y|}\right) \quad \approx xy\left(1 - \left[\frac{\delta x}{|x|} + \frac{dy}{|y|}\right]\right)$

El error relativo del producto es igual a la suma de los errores relativos:

$$q = xy \rightarrow \frac{\delta q}{|q|} \approx \frac{\delta x}{|x|} + \frac{\delta y}{|y|} \tag{8}$$

6.4 Propagación de errores en cocientes

- Datos iniciales: $x \pm \delta x = x\left(1 \pm \frac{\delta x}{|x|}\right) \quad y \pm \delta y = y\left(1 \pm \frac{\delta y}{|y|}\right)$
- Sea el cociente $q = \frac{x}{y}$
- ¿Cuál es la incertidumbre, δq?

Cociente

Valor máximo de q
$$q_{max} = \frac{x\left(1+\frac{\delta x}{|x|}\right)}{y\left(1-\frac{\delta y}{|y|}\right)} \approx \frac{x}{y}\left(1+\frac{\delta x}{|x|}\right)\left(1+\frac{dy}{|y|}\right) \approx \frac{x}{y}\left(1+\frac{\delta x}{|x|}+\frac{dy}{|y|}\right)$$

Valor mínimo de q
$$q_{min} = \frac{x\left(1-\frac{\delta x}{|x|}\right)}{y\left(1+\frac{\delta y}{|y|}\right)} \approx \frac{x}{y}\left(1-\frac{\delta x}{|x|}\right)\left(1-\frac{dy}{|y|}\right) \approx \frac{x}{y}\left(1-\frac{\delta x}{|x|}+\frac{dy}{|y|}\right)$$

El error relativo del cociente es la suma de los errores relativos:

$$q = \frac{x}{y} \rightarrow \frac{\delta q}{|q} \approx \frac{\delta x}{|x|} + \frac{\delta y}{|y|} \tag{9}$$

Ejemplo

Para medir la altura de un árbol, L, se mide la longitud de su sombra, L_1 , la altura de un objeto de referencia, L_2 , y la longitud de su sombra, L_3 . Por semejanza:

$$L = L_1 \frac{L_2}{L_3}$$

Realizadas las medidas resultan:

$$L_1 = 200.2 \pm 0.2cm \quad L_2 = 100.4 \pm 0.4cm \quad , \quad L_3 = 10.3 \pm 0.2cm$$

Por lo tanto

$$L = 200.2 \times \frac{100.4}{10.3} = 1951.5cm$$

Su error será

$$\begin{aligned}
\frac{\delta L}{|L|} &\approx \frac{\delta L_1}{|L_1|} + \frac{\delta L_2}{|L_2|} + \frac{\delta L_3}{|L_3|} = \frac{0.2}{200,2} + \frac{0.4}{100.4} + \frac{0.2}{10.3} \\
&= (0.001 + 0.004 + 0.019) = 0.024 \rightarrow \delta L = 0.024 \times 1951.5 = 46.8 \\
L &= 1951.5 \pm 46.8cm
\end{aligned}$$

6.5 Errores del producto por una constante

- Datos iniciales: $x \pm \delta x$
- Sea el producto por una constante $q = Ax$
- ¿Cuál es la incertidumbre, δq?

  Aplicando la regla del producto

$$\frac{\delta q}{|q|} \approx \frac{\delta A}{|A|} + \frac{\delta x}{|x|} = \frac{\delta x}{|x|} \longrightarrow \delta q = |A|\delta x$$

El error absoluto del producto de una constante por una magnitud es igual al producto de la constante por el error absoluto de la magnitud

$$\delta q = |A|\delta x \tag{10}$$

6.6 Error de una potencia

- Datos iniciales: $x \pm \delta x$
- Sea potencia $q = xn = x.x.x \ldots x.x$
- ¿Cuál es la incertidumbre, δq?

  Aplicando la regla del producto

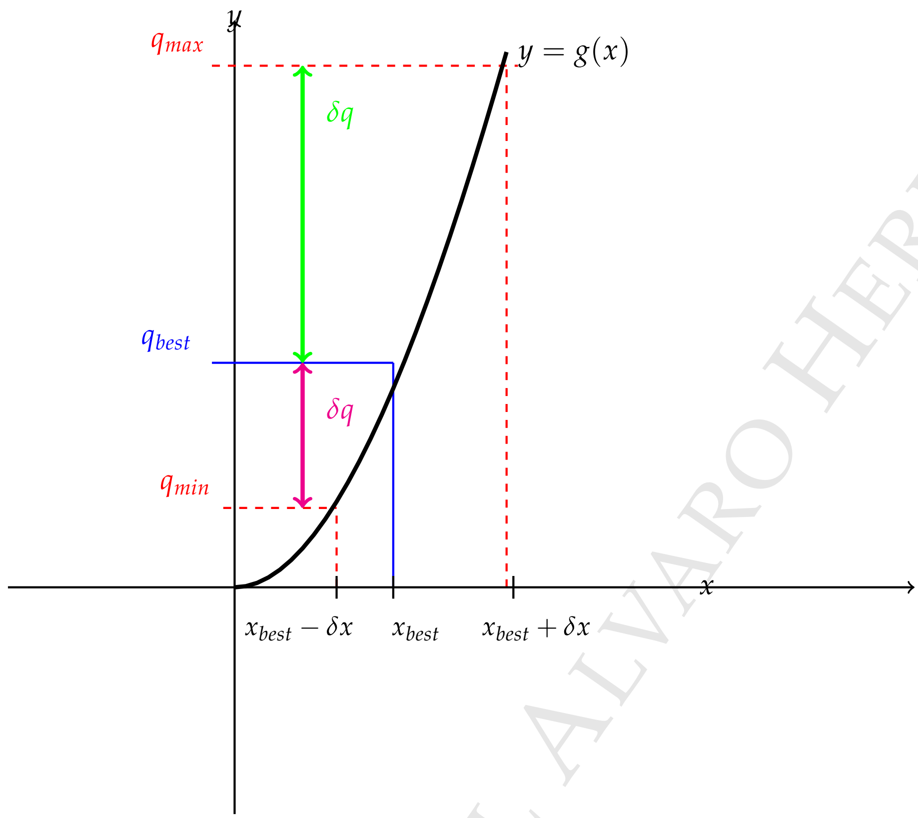
$$\frac{\delta q}{|q|} \approx \frac{\delta x}{|x|} + \frac{\delta x}{|x|} + \cdots + \frac{\delta x}{|x|} = |n|\delta x$$

El error relativo de una potencia es el producto de la potencia por el error relativo de la magnitud.

$$\frac{\delta q}{q} = |n|\frac{\delta x}{x} \tag{11}$$

6.7 Error en funciones de una variable

- Datos iniciales: $x \pm \delta x$
- Sea potencia $q = f(x)$
- ¿Cuál es la incertidumbre, δq?



Gráficamente

$$\delta q = \frac{|q_{max} - q_{min}|}{2}$$

Analíticamente

$$\delta q = f(x + \delta x) - f(x) = \frac{df(x)}{dx}\delta x$$

Si x se mide con un error δx y se utiliza para calcular $q = f(x)$, el error absoluto de q viene dado por :

$$\delta q = \left|\frac{df(x)}{dx}\right|\delta x \tag{12}$$

6.8 Error de función de varias varias variables

Las reglas para el cálculo de errores que hemos visto se pueden deducir de una fórmula más general que nos permite resolver casos más complicados. Sean las medidas x, y con errores δx , δy usadas para calcular:

$$q = f(x, y)$$

Mediante un desarrollo en serie para el caso de varias variables:

$$f(x + \delta x, y + \delta y) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial dx}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y \ldots$$

con lo que

$$\delta q = f(x+\delta x, y+\delta y) - f(x,y) \approx \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\delta y$$

Ejemplos:

Función	Errores	Error
$q = kx$	$x \pm \delta x$	$\delta(q) = k\delta(x)$
$q = \pm x \pm y \pm \ldots$	$x \pm \delta x \quad y \pm \delta y$	$\delta(q) = \delta(x) + \delta(y)$
$q = kx^{\alpha}y^{\beta}$	$x \pm \delta x \quad y \pm \delta y$	$\frac{\delta(q)}{\lvert z\rvert} = \alpha\frac{\delta(x)}{\lvert x\rvert} + \beta\frac{\delta(y)}{\lvert y\rvert}$

6.9 Errores independientes y aleatorios

Las reglas anteriores suponen una sobre estimación del error, puesto que siempre nos situamos en el caso más desfavorable.

Ejemplor: Errores de la suma

Dados $x \pm \delta x$, $y \pm \delta y$ el error de la suma $q = x + y$ viene dado por $\delta z \approx \delta x + \delta y$

Sin embargo: El máximo valor posible de q, $q \pm \delta q$ se alcanza cuando nos equivocamos simultáneamente δx en x y δy en y, lo que es altamente improbable si las medidas son aleatorias e independientes. Una sobre estimación (o subestimación) de x no viene necesariamente acompañada de una sobreestimación (o subestimación) de y . Si las medidas son independientes

- La hipótesis pesimista es exagerada.
- Los errores se cancelan parcialmente.
- Los errores se propagan cuadráticamente.

6.10 Fórmula general para la propagación de errores

6.10.1 Medidas independientes

Sean las medidas de x , $y, \ldots w$ con errores $\delta x, \delta y, \ldots \delta w$, usadas para calcular :

$$q = f(x, y, \ldots, w)$$

Si los errores son independientes y aleatorios, entonces el error de z es la suma en cuadratura

$$\delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial w}\delta w\right)^2}$$

Ejemplos

Función	Errores	Error
$q = kx$	$x \pm \delta x$	$\delta(q) = k\delta(x)$
$q = \pm x \pm y \pm \ldots$	$x \pm \delta x \quad y \pm \delta y$	$\delta(q) = \sqrt{[\delta(x)]^2 + [\delta(y)]^2 + \ldots}$
$q = kx^\alpha y^\beta$	$x \pm \delta x \quad y \pm \delta y$	$\frac{\delta(q)}{\lvert q\rvert} = \sqrt{\left[\alpha\frac{\delta(x)}{\lvert x\rvert}\right]^2 + \left[\beta\frac{\delta(y)}{\lvert y\rvert}\right]^2 + \ldots}$

6.10.2 Problema semidirecto

$z = f(x, y, \ldots m, n, \ldots)$	Errores conocidos $\varepsilon(x), \varepsilon(y), \ldots$
	Errores desconocidos $\varepsilon(m), \varepsilon(n), \ldots$

¿ Cuál ha de ser $\varepsilon(m), \varepsilon(n) \ldots$, para que no influya mucho $\varepsilon(z)$?

$$\varepsilon^2(z) = \underbrace{\left[\frac{\partial z}{\partial x}\varepsilon(x)\right]^2 + \left[\frac{\partial z}{\partial y}\varepsilon(y)\right]^2 + \ldots}_{A} + \underbrace{\left[\frac{\partial z}{\partial m}\varepsilon(m)\right]^2 + \left[\frac{\partial z}{\partial n}\varepsilon(n)\right]^2}_{kT} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2(z) &= A + kT \longrightarrow kT = 0.2A \\
\varepsilon(z) &= 1.1\sqrt{A} \\
T &= 0.2\frac{A}{k} \\
\left[\frac{\partial z}{\partial m}\varepsilon(m)\right]^2 &= T \longrightarrow \varepsilon(m) \\
\left[\frac{\partial z}{\partial n}\varepsilon(m)\right]^2 &= T \longrightarrow \varepsilon(n) \\
\vdots &= \vdots
\end{aligned}$$

6.10.3 Problema Inverso

$z = f(x, y, \ldots, m, n)$	Error deseado $\varepsilon(z)$
	Error conocidos $\varepsilon(x), \varepsilon(y)$
	Error conocidos $\varepsilon(m), \varepsilon(n)$

¿ Cuál ha de ser $\varepsilon(m), \varepsilon(n) \ldots$, para que $\varepsilon(z)$ sea el deseado?

$$\varepsilon^2(z) = \underbrace{\left[\frac{\partial z}{\partial x}\varepsilon(x)\right]^2 + \left[\frac{\partial z}{\partial y}\varepsilon(y)\right]^2 + \ldots}_{A} + \underbrace{\left[\frac{\partial z}{\partial m}\varepsilon(m)\right]^2 + \left[\frac{\partial z}{\partial n}\varepsilon(n)\right]^2}_{kT} \tag{14}$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^2(z) &= A + kT \longrightarrow T = \frac{\varepsilon^2(z) - A}{k} \\
\left[\frac{\partial z}{\partial m}\varepsilon(m)\right]^2 &= T \longrightarrow \varepsilon(m) \\
\left[\frac{\partial z}{\partial n}\varepsilon(m)\right]^2 &= T \longrightarrow \varepsilon(n) \\
\vdots &= \vdots
\end{aligned}
$$