UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1803

Clase ejemplo: Propagación de errores

Alvaro Herrera Carrillo

Se midió la densidad de un objeto prismático recto (de madera o vidrio) mediante regla y balanza. Con la teoría de **propagación de errores** se determinó cuantitativamente la **precisión** de la medida **Introducción teórica** Todas las medidas realizadas están afectadas por errores experimentales. Estos se clasifican en sistemáticos, de apreciación y casuales o accidentales. Para el caso de este trabajo -medir una densidad en forma indirecta- se determinaron los errores de apreciación de los instrumentos usados (la regla y la balanza) y, por propagación, se halló el error correspondiente a la densidad.

Fórmula de densidad La densidad de un cuerpo homogéneo se define como su masa por unidad de volumen:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Por otro lado, si el cuerpo es un prisma recto de base rectangular de altura h, base b y espesor L, su volumen es:

$$V = bhL$$

Por lo tanto, la densidad es:

$$\rho = \frac{m}{bhL}$$

Propagación de errores : Como la magnitud ρ es la función de las variables b, h, L y m:

$$\rho = \rho(b, h, L, m)$$

Si se conocen los errores de apreciación, que denominamos $\Delta b, \Delta h, \Delta L$ y $Deltam$; de sus mediciones respectivas se obtendrán:

$$\begin{aligned} b &= \bar{b} \pm \Delta b \\ h &= \bar{h} \pm \Delta h \\ L &= \bar{L} \pm \Delta L \\ m &= \bar{m} \pm \Delta m \end{aligned}$$

Donde $\bar{b}, \bar{h}, \bar{L}$ y $\bar{m}$ son los valores o más probables que se midieron con regla y balanza.
Si se reemplazan en $\rho = \rho(b, h, L, m)$:

$$\rho = \rho(\bar{b} \pm \Delta b, \bar{h} \pm \Delta h, \bar{L} \pm \Delta L, \bar{m} \pm \Delta m)$$

Se tendrá, aproximadamente:

$$\rho \approx \rho(\bar{b}, \bar{h}, \bar{L}, \bar{m}) \pm \Delta\rho$$

y el error relativo para ρ resultará ser:

$$\frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}} = \frac{\Delta b}{\bar{b}} + \frac{\Delta h}{\bar{h}} + \frac{\Delta L}{\bar{L}} + \frac{\Delta m}{\bar{m}}$$

con

$$\bar{\rho} = \rho(\bar{b}, \bar{L}, \bar{h}, \bar{m}) = \frac{\bar{m}}{\bar{b}\bar{h}\bar{L}}$$

Pues se aplica la *regla* que una variable producto (o cociente) de otras, como lo es ρ, tiene un error relativo ε_ρ igual a la suma de los errores relativos de las variables intervinientes, tomadas tantas veces como el exponente que tienen:

$$\varepsilon_\rho = \varepsilon_m + \varepsilon_b + \varepsilon_h + \varepsilon_L$$

Teniendo en cuenta todo esto, resulta que:

$$\Delta\rho = \frac{\bar{m}}{\bar{b}\bar{h}\bar{L}} \left(\frac{\Delta m}{\bar{m}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}} + \frac{\Delta h}{\bar{h}} + \frac{\Delta L}{\bar{L}} \right)$$

y finalmente:

$$\rho = \bar{\rho} \pm \Delta\rho$$

Resultados experimentales Se determinaron primeramente los errores de apreciación de la regla y la balanza. Como la apreciación de la regla es de $1mm$ y lo que podemos ver (error de apreciación del observador) la mitad:

$$\Delta b = \Delta h = \Delta L = 0.5mm = 0.05cm$$

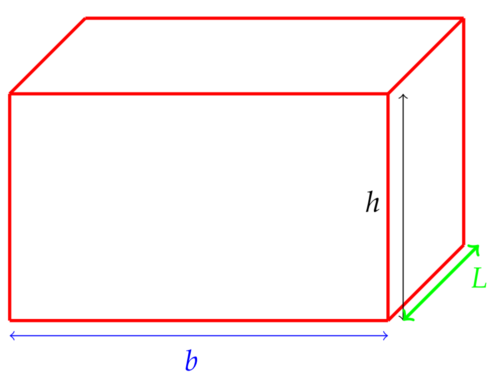
pues

$$1mm = \frac{1cm}{10} = 0.1cm \quad \text{con lo cual} \quad 0.5mm = 0.5 \times 0.1cm = 0.05cm$$

Para la balanza usada :

$$\Delta m = 0.5g$$

La figura siguiente (de Y. Serapio) muestra el objeto medido y los resultados respectivos:



Por su parte, la Tabla 1 organiza las magnitudes medidas (de Y. Serapio):

Valores Leidos ($\bar{L}cm$)		Error de Apreciación(ΔL)	Resultado de su medición($\bar{L} \pm \Delta L$)
$\bar{b}$	14.8 cm	0.05 cm	$(14.8 \pm 0.05)cm$
$\bar{h}$	4.5 cm	0.05 cm	$(4.5 \pm 0.05)cm$
$\bar{e}$	1.9 cm	0.05 cm	$(1.9 \pm 0.05)cm$

Valor Leído		Error de Apreciación (Δm)	Resultado de su medición ($\bar{m} \pm \Delta m$)
$\bar{m}$	72.5 g	0.5 g	$(72.5 \pm 0.5)g$

el resultado del cálculo de la densidad es:

$$\rho = \frac{72.5g}{14.8cm \times 4.5cm \times 1.90cm} = 0.573$$

y

$$\begin{aligned}
\Delta\rho &= \bar{\rho}\left(\frac{\Delta m}{\bar{m}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}} + \frac{\Delta h}{\bar{h}} + \frac{\Delta L}{\bar{L}}\right) \\
&= 0.573\left(\frac{0.5}{72.5} + \frac{0.05}{14.8} + \frac{0.05}{4.5} + \frac{0.05}{1.90}\right) = 0.03g/cm^3
\end{aligned}$$

Luego:

$$\rho = \bar{\rho} \pm \Delta\rho = (0.573 \pm 0.03)g/cm^3$$

y el error relativo es:

$$\varepsilon_\rho = \frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}} = \frac{0.03}{0.573} = 0.05$$

o sea que, el error porcentual resulta:

$$\varepsilon_\rho\% = 100\frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}} \approx 100 \times 0.05 = 5\%$$

Contribución relativa de los errores Si se desglosa de cada medida directa al error de la densidad, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta m}{\bar{m}} &= \frac{0.5}{72.5} = 7 \times 10^{-3} \\
\frac{\Delta b}{\bar{b}} &= \frac{0.05}{14.8} = 3 \times 10^{-3} \\
\frac{\Delta h}{\bar{h}} &= \frac{0.05}{4.5} = 1 \times 10^{-2} \\
\frac{\Delta L}{\bar{L}} &= \frac{0.05}{1.90} = 3 \times 10^{-2}
\end{aligned}$$

de todos éstos, el mayor es 3×10^{-2}, que corresponde a la medida del espesor. Si quisiéramos que éste fuera del orden del que se obtiene para la masa, igual a 7×10^{-3}, debiéramos usar una regla cuya apreciación sea tal que:

$$\frac{\Delta L}{\bar{L}} = \frac{x}{1.90} = \frac{\Delta m}{\bar{m}} = \frac{0.5}{72.5} = 7 \times 10^{-3}$$

o sea que :

$$\frac{x}{1.90} = 7 \times 10^{-3} \Rightarrow x < 0.01cm$$